【問1】

以下は，右手座標系における3次元座標変換に関する問題である．[　　　]に最も適するものを解答群から選び，記号で答えよ．ただし，3次元座標変換は，同次座標を用いて，式(1.1)で表すものとし，変換前の座標を(x, y, z)，変換後の座標を(x', y', z')とするなお，この座標変換において，回転の正方向は軸の正方向から原点をみたときの反時計まわりとする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

式(1．1)

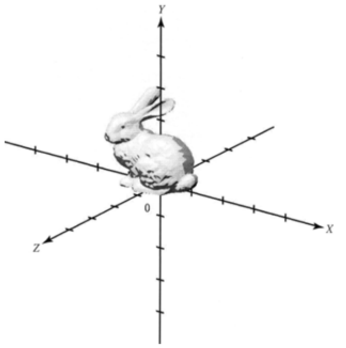

図1.1

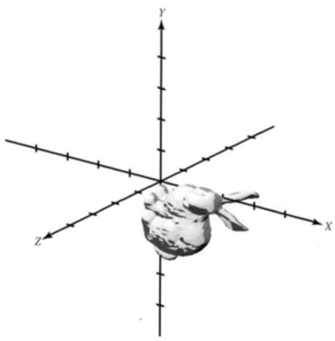

図1.2

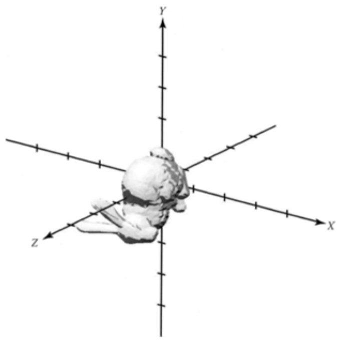

図1.3

(1) 図1.1に示す3次元モデルは，底面の中心が原点にある．この3次元モデルを図1から図2に変換するために，3次元モデルをz軸まわりに-90°回転したあと，y軸の負方向に1だけ平行移動する．このとき，z軸まわりに-90°回転する変換行列は[　(a)　]となり，平行移動の変換行列は[　(b)　]となる．したがって，これらの変換の合成行列は[　(c)　]となる．

【aの解答群】

ア $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　イ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　ウ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　エ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【bの解答群】

ア $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　イ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　ウ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　エ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【cの解答群】

ア $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　イ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　ウ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　エ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) つぎに，この3次元モデルを図1.1から図1.3に変換するために2通りの方法を考える．x軸まわりに90°回転したあと，z軸まわりに90°回転することによって図1.3に変換するための変換行列は[　(a)　]を計算した結果となる．また，ある軸まわりに90°回転したあと，x軸まわりに90°回転することによって図1.3に変換するための変換行列は[　(b)　]を計算した結果となる．

【aの解答群】

ア
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

イ
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ウ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

エ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【bの解答群】

ア
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

イ
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ウ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

エ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【解答1】

(1) (a) エ　(b) ア　(c) ウ
(2) (a) ア　(b) ウ

(1) (a): 軸まわりの回転行列は，回転角をθとしたとき，以下の式で表されます．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，z軸まわりに-90°だけ回転させるので上記の式より，

$$\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．sin(-90°)は-1，cos(-90°)は0ですから，これを代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，正解はエとなります．

(b): x, y, z各軸方向にt_x, t_y, t_zだけ移動させる変換行列は，以下の式で表されます．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，y軸方向へ-1だけ平行移動するので，変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，正解答はアとなります．

(c): 合成変換の行列は，平行移動の変換行列に回転移動の変換行列を右から掛ければよいので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，正解答はウになります．

(2) x軸，y軸まわりの回転行列は，それぞれ以下の式で表されます

y軸まわりの回転

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

y軸まわりの回転

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

z軸まわりの回転は，設問(1)のaで解説したとおりです．

(a)：図1.3の位置に移動するためには，x軸まわりに90°回転してから，z軸まわりに90°回転すればよいので，上記の式より，

$$\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，合成変換の行列はアになります．

(b)：y軸まわりに90°回転してから，x軸まわりに90°回転しても，図1.3の位置に移動することができます．上記の式より，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，そのための合成変換の行列はウになります．