

コンピュータグラフィックス

6. モデリング2

－ 曲線・曲面 －

陽関数形式と陰関数形式

陽関数形式

- 1つの座標値をほかの座標値の関数で定める形式
 - 平面曲線： $y=f(x)$ 例) 放物線： $y=x^2$
 - 曲面： $z=f(x, y)$ 例) 回転放物面： $z=a^2(x^2+y^2)$
- 陽関数で表現された曲面は任意の xy 座標に対して曲面上の点が1つ存在する

陰関数形式

- 2変数,3変数の等式で曲線,曲面を陰に表現する形式
 - 平面曲線： $f(x, y)=0$ 例) 半径 r の円： $f(x, y)=x^2+y^2-r^2=0$
 - 空間曲線： $f(x, y, z)=g(x, y, z)=0$
 - 曲面： $f(x, y, z)=0$ 例) 半径 r の球面： $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0$
- 陰関数形式はレイトラッキング等の交点計算に適している
- 曲線や曲面上の点の等間隔でのサンプリングには不適切

パラメータ形式

- 曲線・曲面の座標値をパラメータの関数として表現

- 平面曲線 : $x=f(t), y=g(t)$

- 例) 半径 r の円 : $x=r\cos(t), y=r\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi$

- 空間曲線 : $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$

- 曲面 : $x=f(u, v), y=g(u, v), z=h(u, v)$

- 例) 半径 r の球面 : $x=r\cos(u)\cos(v), y=r\sin(u)\cos(v),$

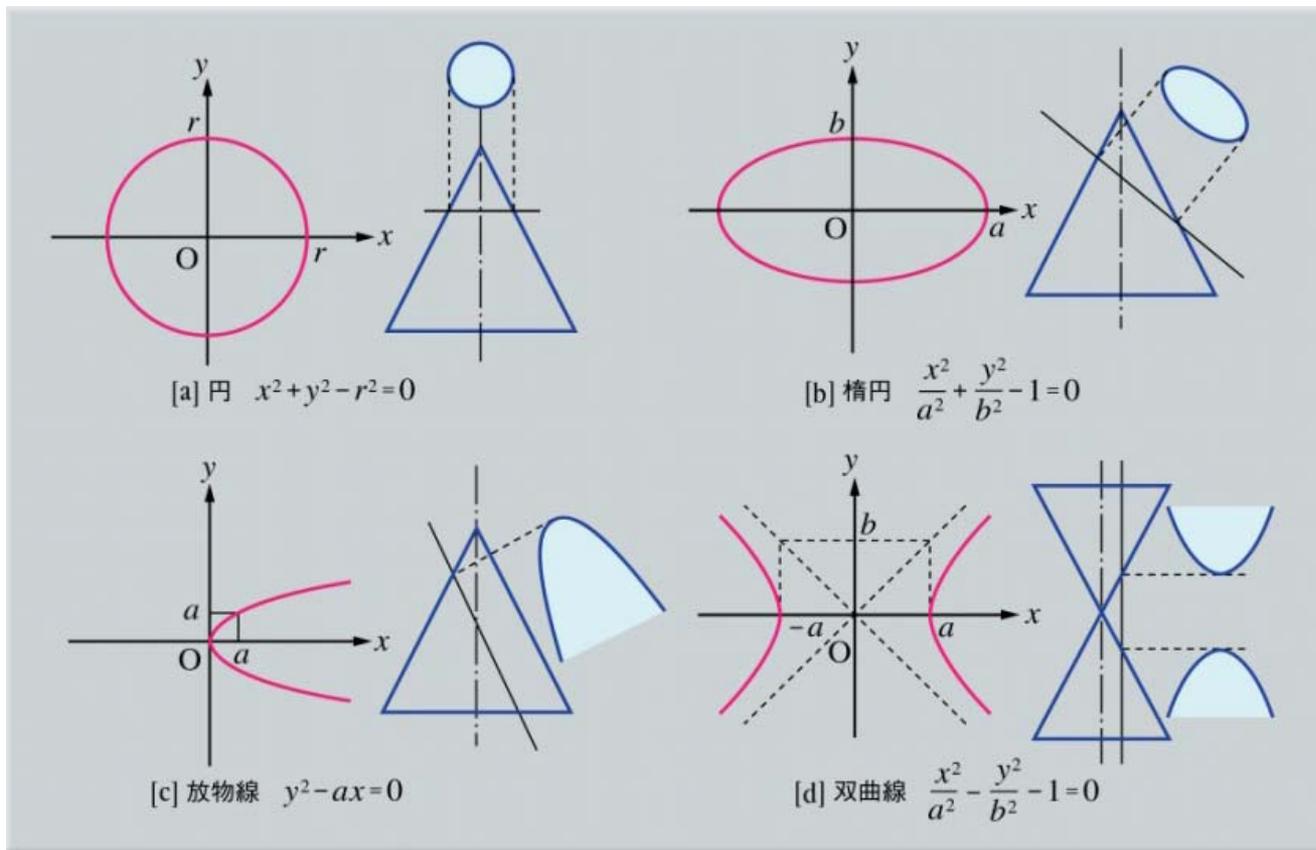
- $z=r\sin(v), 0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$

- パラメトリック曲線/曲面と呼ばれ、パラメータを変化させることで連続した点を求めることができる

- 直線等との交点計算は難しい

2次曲線

- 2次多項式を用いた陰関数形式による代数曲線
 - $ax^2+by^2+c+2dxy+2ex+2fy=0$
- 楕円、放物線、双曲線の3種類に分類される



円錐の断面と2次曲線

パラメトリック曲線

- 各座標がパラメータ t の陽関数 $C=F(t)$ と表現された曲線
 - 多項式曲線： F が t の多項式
 - 有理式曲線： F が t の有理式
 - 複合曲線：複数の曲線の部分(セグメント)を一本に合わせたもの
- 曲線の性質
 - 凸包性：曲線が制御点の凸包内に存在
 - 変動減少性：曲線が制御点列の形状をなめらかな形にしたもの
 - 局所性：制御点を移動したとき曲線で変形する部分が限定される
 - 直線再現性：制御点が直線上にあれば得られる曲線が直線になる
 - アフィン不変性：曲線にアフィン変換を施したものと、アフィン変換を施した制御点から得られる曲線が一致
 - 2次曲線の再現性：円や楕円、双曲線を正確に表現できること
 - 射影不変性：曲線に射影変換を施した結果と、射影変換を施した制御点から得られる曲線が一致すること

パラメトリック曲線

曲線の性質

性質 \ 種類	ベジエ曲線	Bスプライン曲線	有理ベジエ曲線	NURBS 曲線
凸包性	○	○	○	○
変動減少性	○	○	○	○
局所性	×	○	×	○
直線再現性	○	○	○	○
アフィン不変性	○	○	○	○
2次曲線の再現性	×	×	○	○
射影不変性	×	×	○	○

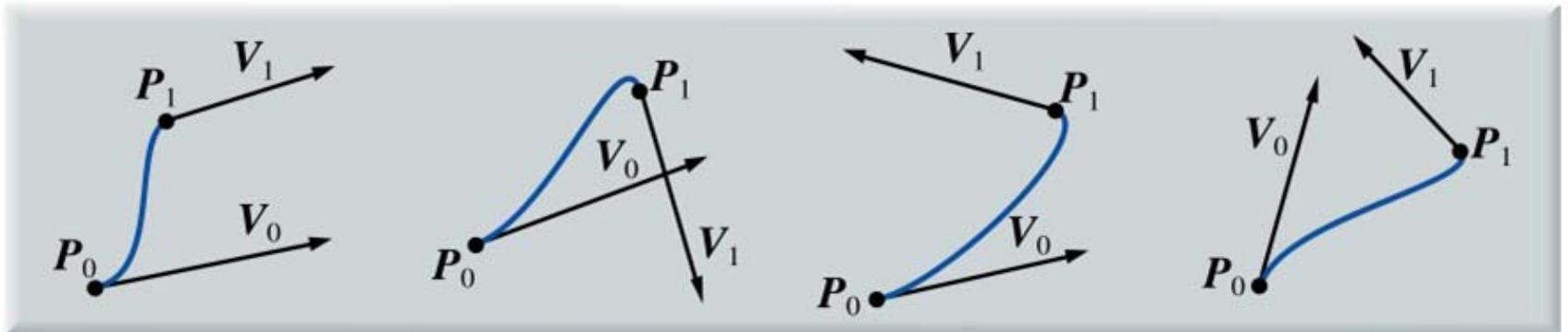
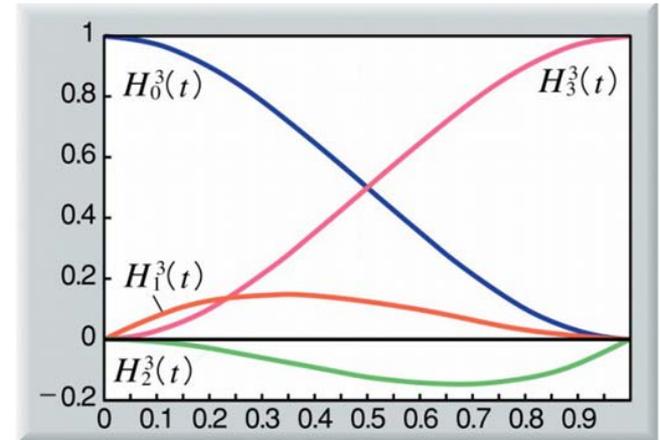
制御点を用いて形を定める曲線の特徴

	1セグメント	複合曲線
局所性	なし	あり
2次曲線再現性	ベジエ曲線	Bスプライン曲線
	有理ベジエ曲線	NURBS曲線

ファーガソン曲線

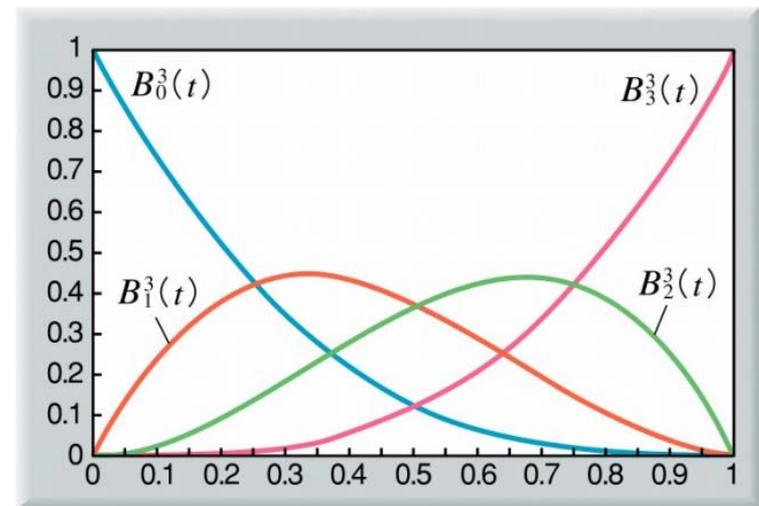
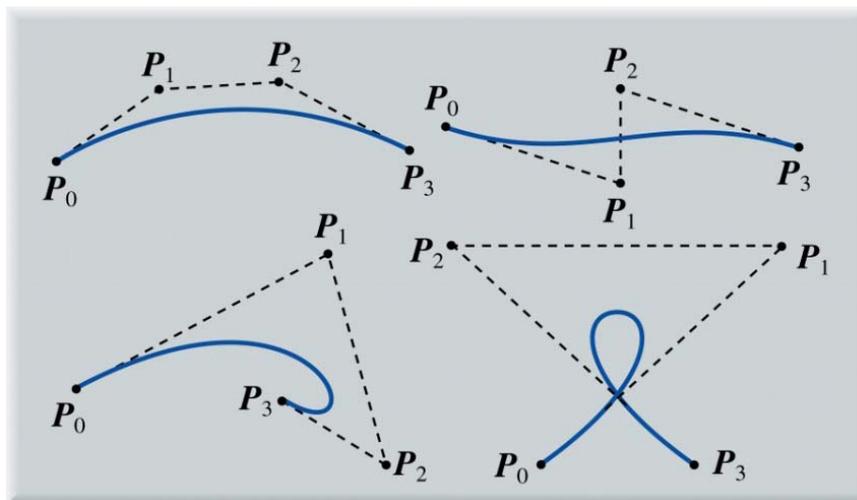
- 端点の位置ベクトル P_0, P_1 とその接ベクトル V_0, V_1 を補完する形で定義された多項式曲線
- 3次エルミート関数 $H_i^3(t)$ をかけて足し合わせた形

- $P(t) = P_0 H_0^3(t) + V_0 H_1^3(t) + V_1 H_2^3(t) + P_1 H_3^3(t), 0 \leq t \leq 1$
- $H_0^3(t) = (2t+1)(1-t)^2$
- $H_1^3(t) = t(1-t)^2$
- $H_2^3(t) = -t^2(1-t)$
- $H_3^3(t) = t^2(3-2t)$



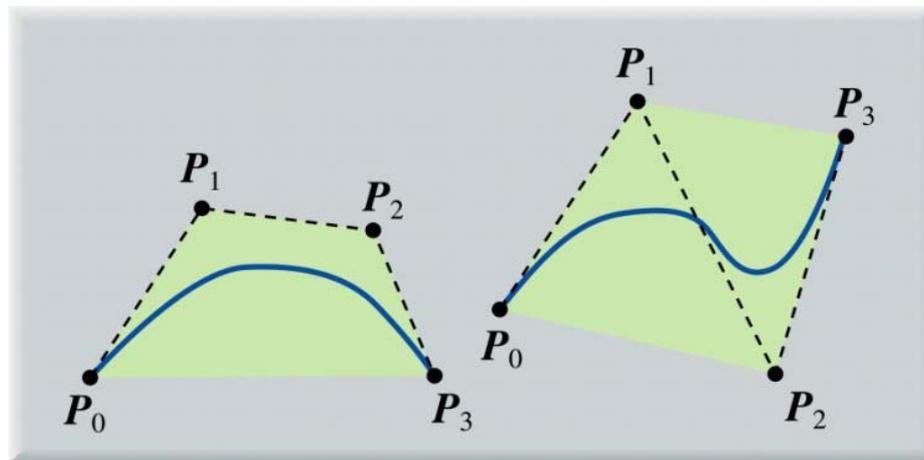
ベジエ曲線

- 複数の制御点 $\{P_i\}$ によって定義される
- 3次バーンスタイン基底関数 $B_i^3(t)$ をかけて足し合わせた形
- n 次のベジエ曲線は $n+1$ 個の制御点が必要
- CGでは3次ベジエ曲線が良く用いられる
 - $P(t) = P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + P_2 B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t)$, $0 \leq t \leq 1$
 - $B_0^3(t) = (1-t)^3$
 - $B_1^3(t) = 3t(1-t)^2$
 - $B_2^3(t) = 3t^2(1-t)$
 - $B_3^3(t) = t^3$
- 3次のベジエ曲線でファーガソン曲線が表現可能



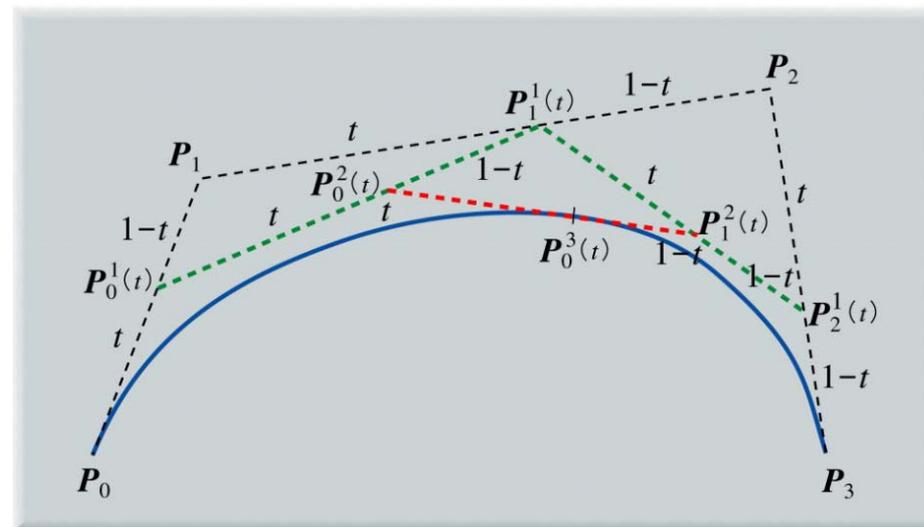
ベジエ曲線

- 制御点によって定義される凸包の中に曲線が完全に含まれる



ベジエ曲線の凸包性

- ド・カステリヨのアルゴリズムによりベジエ曲線は新たな2つのベジエ曲線に分割できる



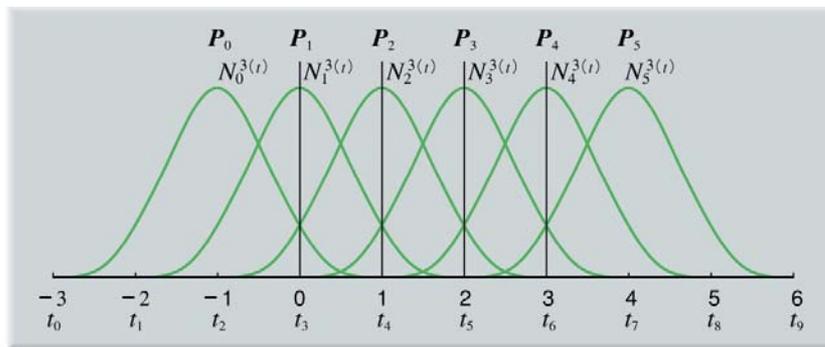
ド・カステリヨのアルゴリズム

Bスプライン曲線

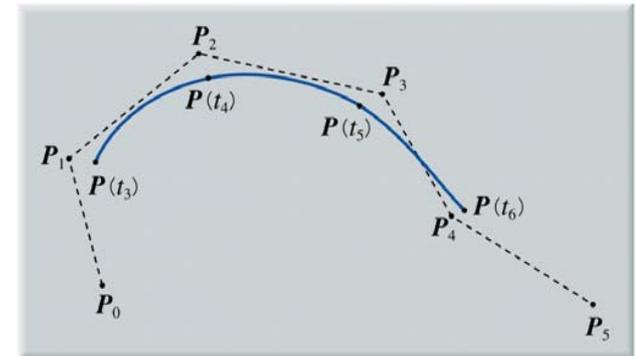
- 制御点 $\{P_i\}$ とノット列 $\{N_i\}$ で指定された接続点のパラメータにより複数の曲線(Bスプライン既定関数 N_i^n) を1本に接続
 - 一様Bスプライン曲線：ノット値が一定間隔のもの
 - 非一様Bスプライン曲線：ノット値が一定間隔でないもの
- L 個のセグメントから構成される n 次のBスプライン曲線は次式で定義される

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n+L-1} P_i N_i^n(t), t_n \leq t \leq t_{n+L}$$

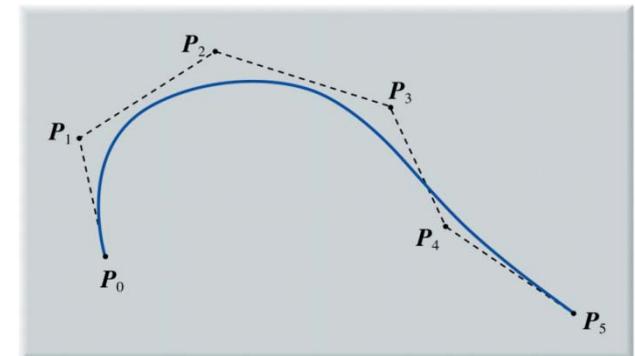
- 実用的には3次が多く用いられる



一様3次Bスプライン既定関数



一様3次Bスプライン曲線($L=3$)



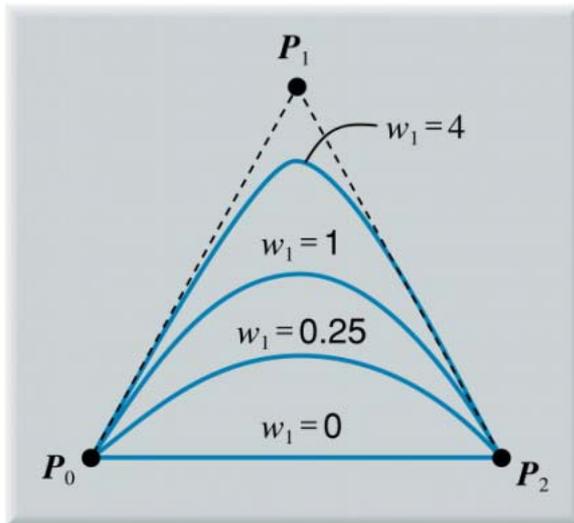
非一様3次Bスプライン曲線

有理ベジエ曲線

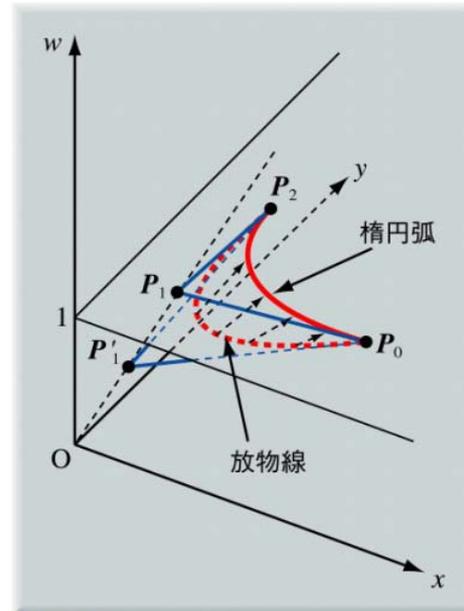
- 制御点 $\{P_i\}$ とそれらに対する重み $\{w_i\}$ で定義される

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

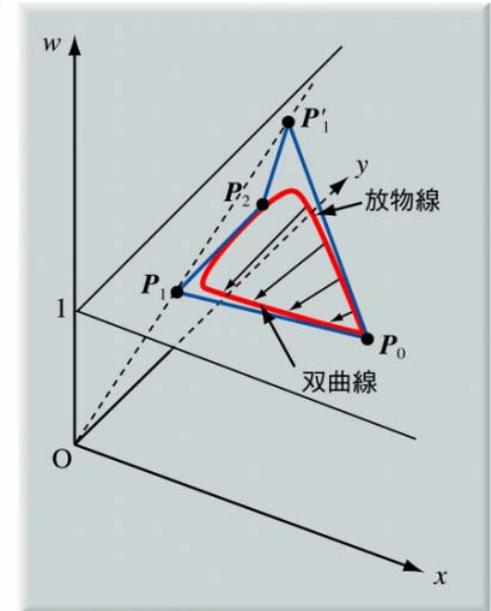
- 2次有理ベジエ曲線は2次曲線(円錐曲線)を正確に表現できる
 - 楕円 : $0 < w_i < 1$
 - 放物線 : $w_i = 1$
 - 双曲線 : $1 < w_i$



有理ベジエ曲線



[a] 楕円 ($0 < w_1 < 1$)



[b] 双曲線 ($w_1 > 1$)

平面 $w=1$ に投影したベジエ曲線

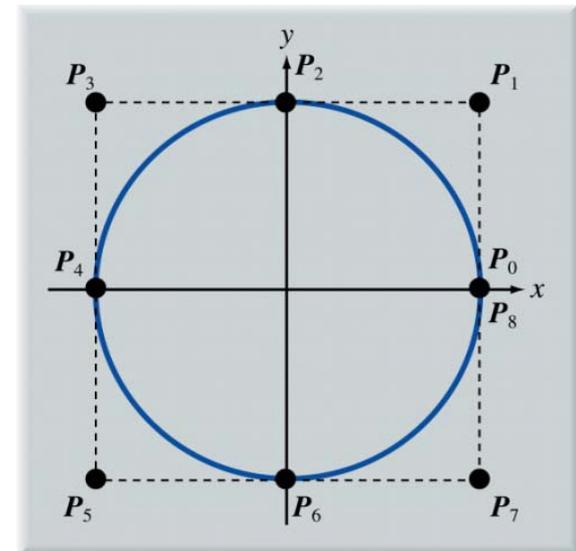
NURBS曲線

- 制御点 $\{P_i\}$ とそれらに対する重み $\{w_i\}$ 、ノット列 $\{N_i\}$ で定義する区分別有理式曲線
- 全ての重みを等しくするとBスプライン曲線になる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n+L-1} w_i N_i^n(t)}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+L}$$

- 2次のNURBS曲線でノット列を $(0,0,0,1,1,1)$ とすると、2次の有理ベジエ曲線になる
 - 2次曲線を正しく表現できる

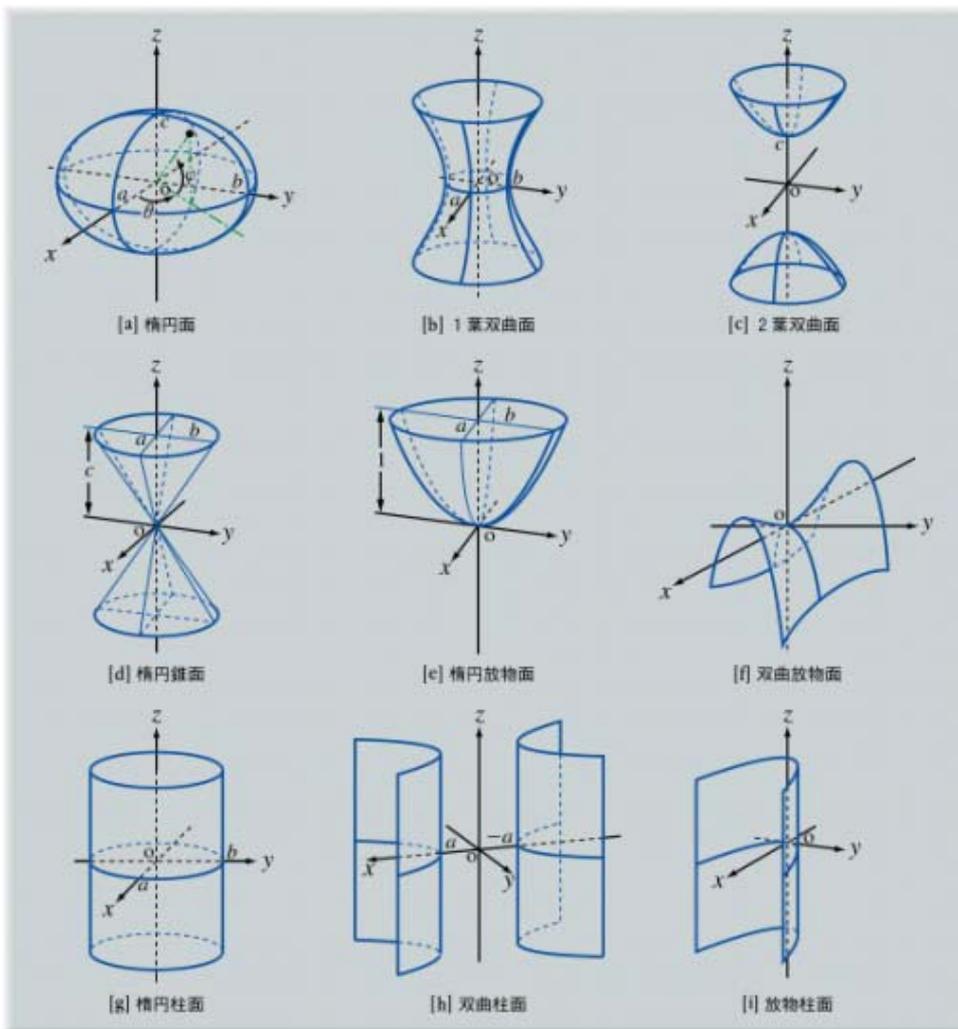
NURBSによる円周の表現



2次曲面

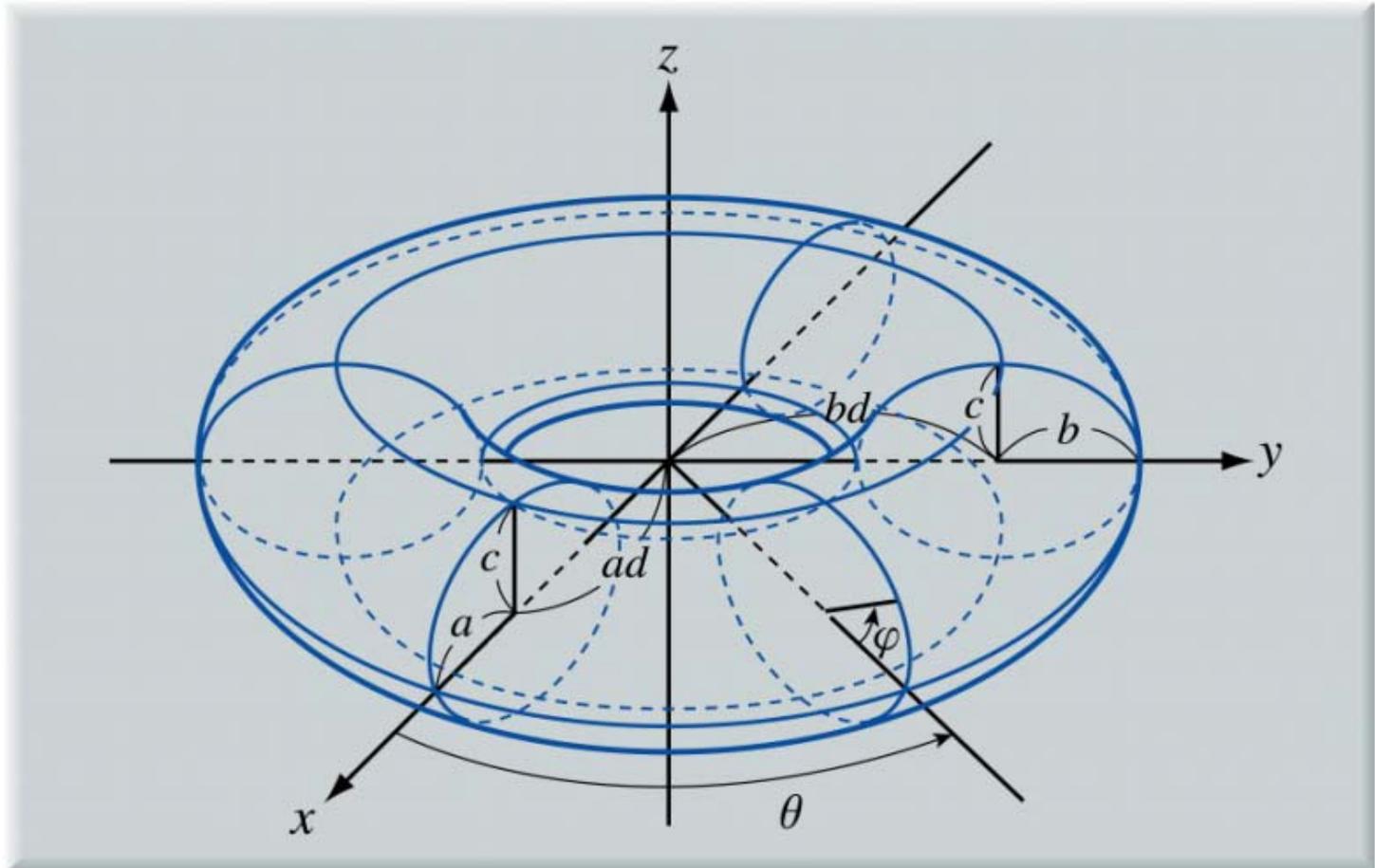
- 2次多項式によって表現される代数曲面

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d + 2eyz + 2fzx + 2gxy + 2hx + 2iy + 2jz = 0$$



トーラス面

- 2次曲面ではないが、2次曲面の拡張と考えられる
- 楕円を軸の周りに回転させた形



パラメトリック曲面

- 各座標がパラメータ u, v の陽関数 $S=F(u, v)$ と表現された曲面
 - 多項式曲面： F が u と v の多項式
 - 有理式曲面： F が u と v の有理式
 - 複合曲面：複数の曲面の部分(パッチ)をつなぎ合わせたもの
 - 双 n 次曲面： u と v の次数が共に n の曲面
- 曲面の性質
 - 凸包性：曲面線が制御点の凸包内に存在
 - 変動減少性：曲面が制御点列の形状をなめらかな形にしたもの
 - 局所性：制御点を移動したとき曲面で変形する部分が限定される
 - 平面再現性：制御点が平面上にあれば得られる曲面が平面になる
 - アフィン不変性：曲面にアフィン変換を施したものと、アフィン変換を施した制御点から得られる曲面が一致
 - 2次曲面の再現性：球面や楕円面、双曲面を正確に表現できること
 - 射影不変性：曲面に射影変換を施した結果と、射影変換を施した制御点から得られる曲面が一致すること

パラメトリック曲面

曲面の性質

性質 \ 種類	ベジエ曲面	Bスプライン曲面	有理ベジエ曲面	NURBS 曲面
凸包性	○	○	○	○
変動減少性	○	○	○	○
局所性	×	○	×	○
平面再現性	○	○	○	○
アフィン不変性	○	○	○	○
2次曲面の再現性	×	×	○	○
射影不変性	×	×	○	○

制御点を用いて形を定める曲面の特徴

		パッチ	複合曲面
局所性 \ 2次曲面再現性	なし	なし	あり
	あり	ベジエ曲面	Bスプライン曲面
		有理ベジエ曲面	NURBS曲面

双3次クーンズ曲面

- 四辺形パッチの四隅の4ベクトルで定義される3次多項式曲面

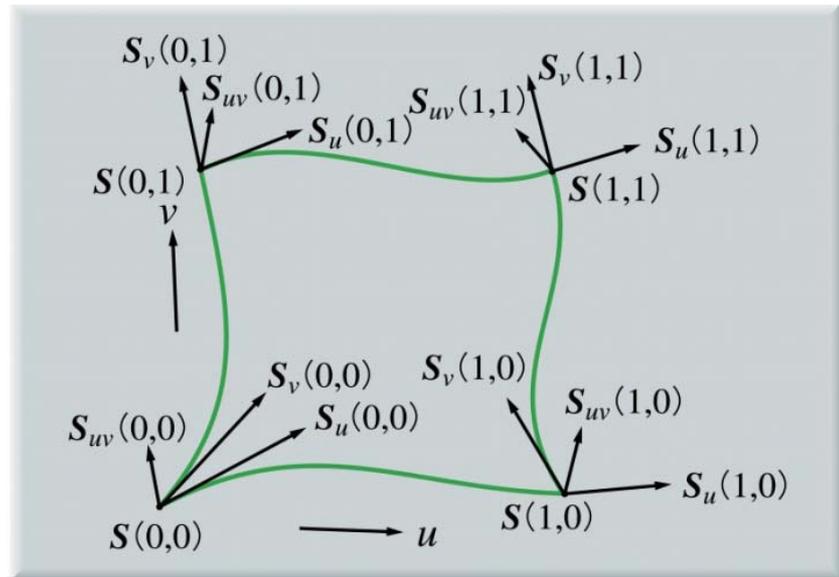
- 位置ベクトル (S) ×1
- 接ベクトル (S_u, S_v) ×2
- ねじれベクトル (S_{uv}) ×1

$$S(u, v) = [H_0^3(u) H_1^3(u) H_2^3(u) H_3^3(u)] \begin{bmatrix} S(0,0) & S_v(0,0) & S_v(0,1) & S(0,1) \\ S_u(0,0) & S_{uv}(0,0) & S_{uv}(0,1) & S_u(0,1) \\ S_u(1,0) & S_{uv}(1,0) & S_{uv}(1,1) & S_u(1,1) \\ S(1,0) & S_v(1,0) & S_v(1,1) & S(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}$$

$$S_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} S(u, v)$$

$$S_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} S(u, v)$$

$$S_{uv}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u \partial v} S(u, v)$$



双3次クーンズ曲面

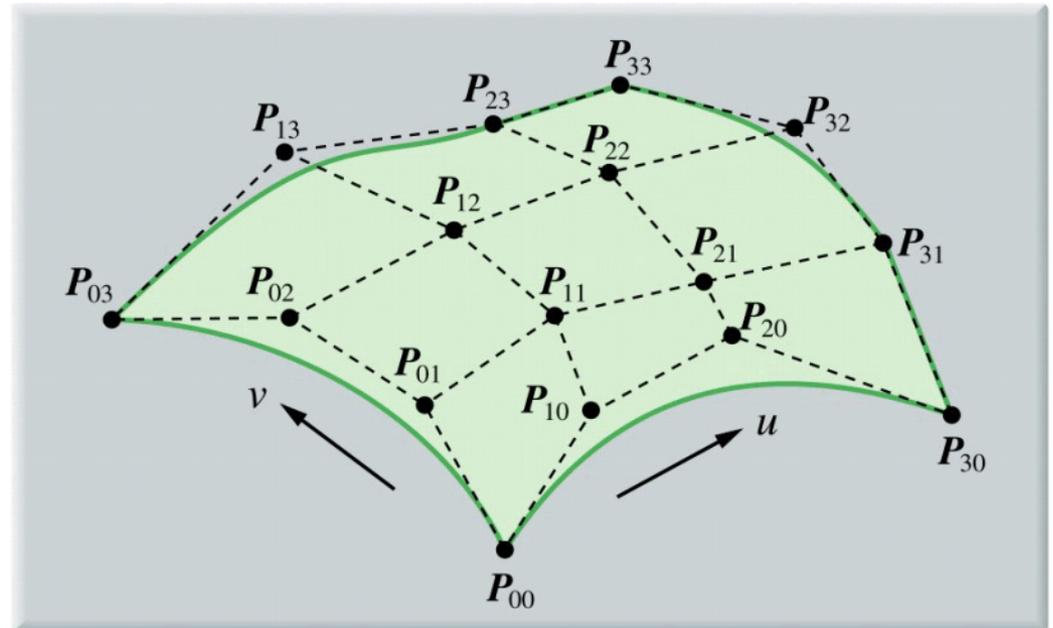
ベジエ曲面

- $(n+1) \times (m+1)$ 個の格子状に並べた制御点 $\{P_{ij}\}$ で定義
- 制御点 $P_{00}, P_{n0}, P_{0m}, P_{nm}$ が四隅を指定し、他が外形を定める
- 四辺は3次のベジエ曲線となる
- CGでは次数が3次までのベジエ曲面が広く用いられる
- 双3次ベジエ曲面は双3次クーンズ曲面と一致する

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$$B_j^m(v) = \binom{m}{j} v^j (1-v)^{m-j}$$



双3次ベジエ曲面

Bスプライン曲面

- 制御点 $\{P_i\}$ 、 u 方向と v 方向のノット列 $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ で定義される
- Bスプライン曲線が複数の区間から構成されるのと同様に、いくつかのパッチから構成される
- $n \times m$ 次のBスプライン曲面を構成する各パッチ $(n+1) \times (m+1)$ 個の制御点で定められ、この他の制御点の移動はそのパッチに影響しない → 局所性

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)$$

有理ベジエ曲面

- 制御点 $\{P_i\}$ とそれらに対する重み $\{w_i\}$ で定義される
- 全ての重みを等しくすると通常のベジエ曲線となる

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

NURBS曲面

- 制御点 $\{P_{ij}\}$ とそれらに対する重み $\{w_{ij}\}$ 、 u 方向と v 方向のノット列 $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ で定義される区分別有理式曲面
- 全ての重みを等しくするとBスプライン曲面になる
- $K \times L$ このパッチで構成される $n \times m$ 次のNURBS曲面は次式で定義される

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n-L-1} \sum_{j=0}^{m-K-1} w_{ij} P_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n-L-1} \sum_{j=0}^{m-K-1} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}$$

$$u_n \leq u \leq u_{n+L}, \quad v_m \leq v \leq v_{m+K}$$

- NURBS曲線では有理ベジエ曲面とBスプライン曲面の性質を持ち、自動車航空機、電化製品、カメラ等様々な工業製品の設計に用いられる