コンピュータグラフィックス

2. 2次元座標変換

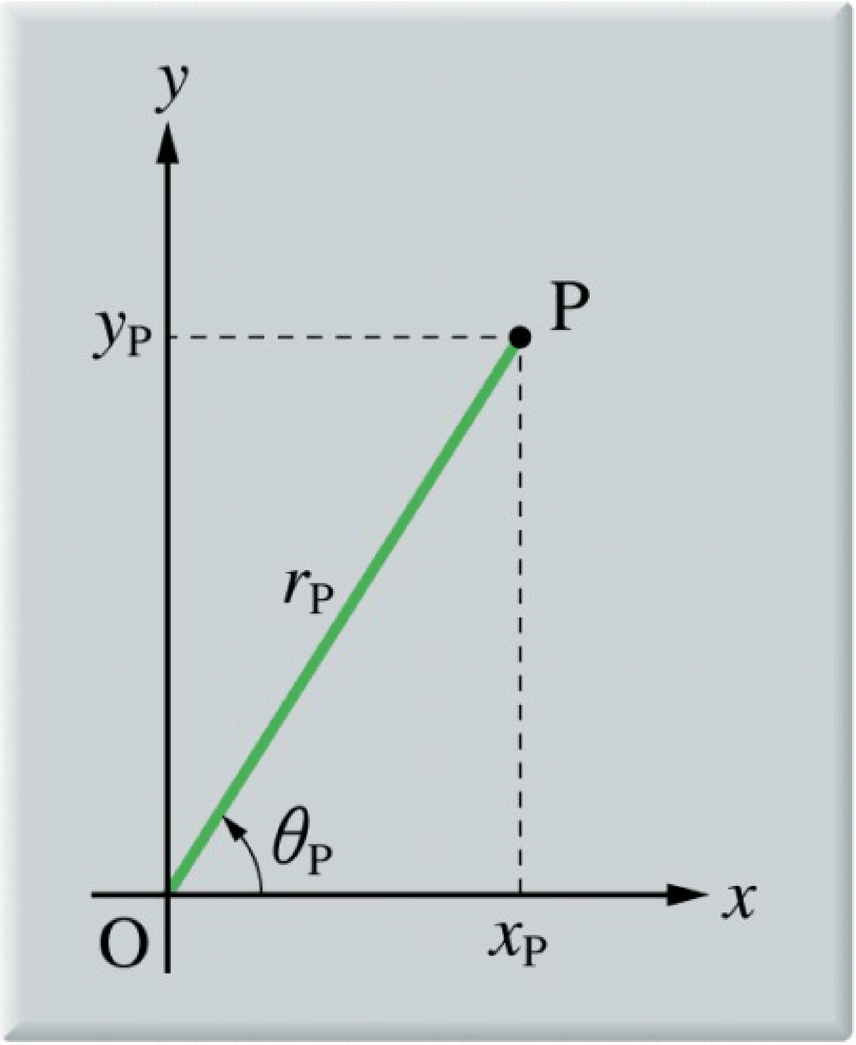
佐藤証 西9-613
akashi.satoh@uec.ac.jp

教科書P.16-25

2次元座標系

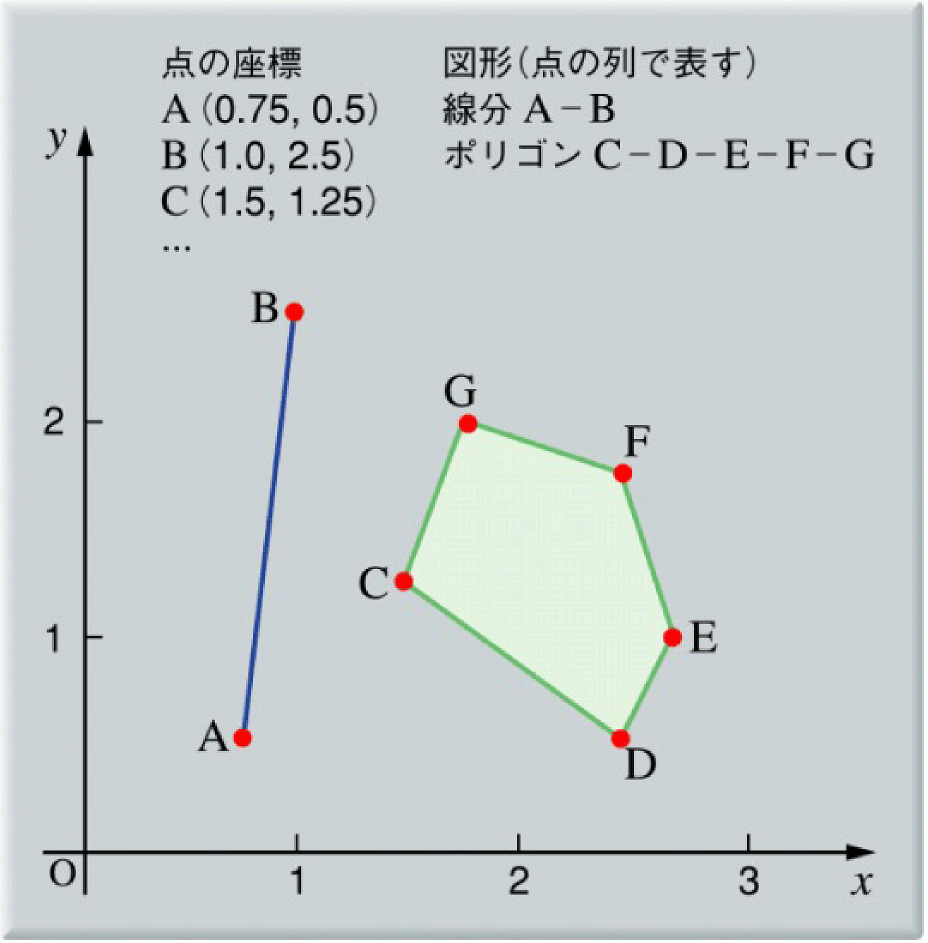
- 2次元直交座標系
  - 平面上の原点Oと原点で直交するx軸とy軸で位置を表現
  - 点Pの位置は座標(x_P, y_P)で一意に表される
- 極座標系
  - 原点Oからの距離rと基準の方向からの角度θによって位置を表現
  - 通常はx軸の正の向きが基準
  - 反時計回りが正の回転方向

$$\begin{cases} x_P = r_P \cos\theta_P \\ y_P = r_P \sin\theta_P \end{cases}$$



2次元図形の基本変換

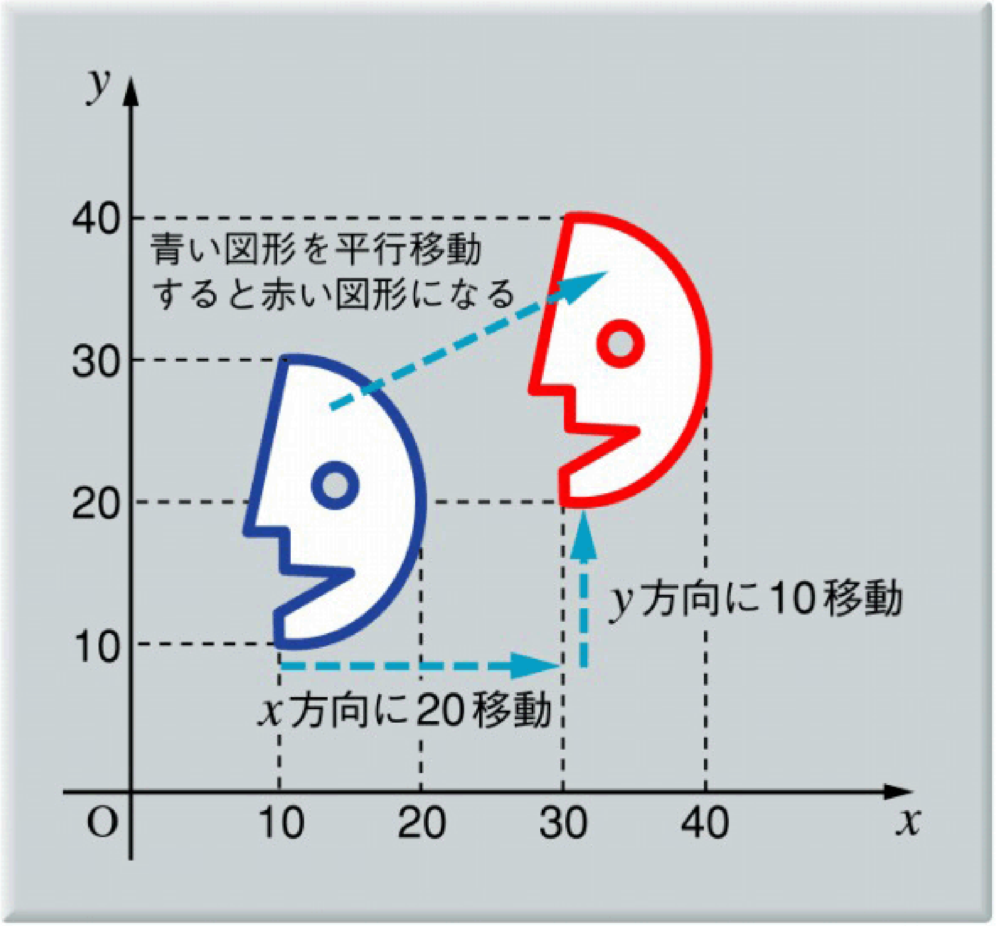
- 代表的な2次元図形
  - 線分，ポリゴン(多角形)，楕円等
- 幾何学変換
  - 平行移動，拡大・縮小，回転，鏡像，スキュー等
  - 幾何学変換を組み合わせて複雑な図形を作成していく



平行移動

- 図形の個々の点(x, y)をそれぞれt_x, t_y移動させ(x', y')に移動する変換

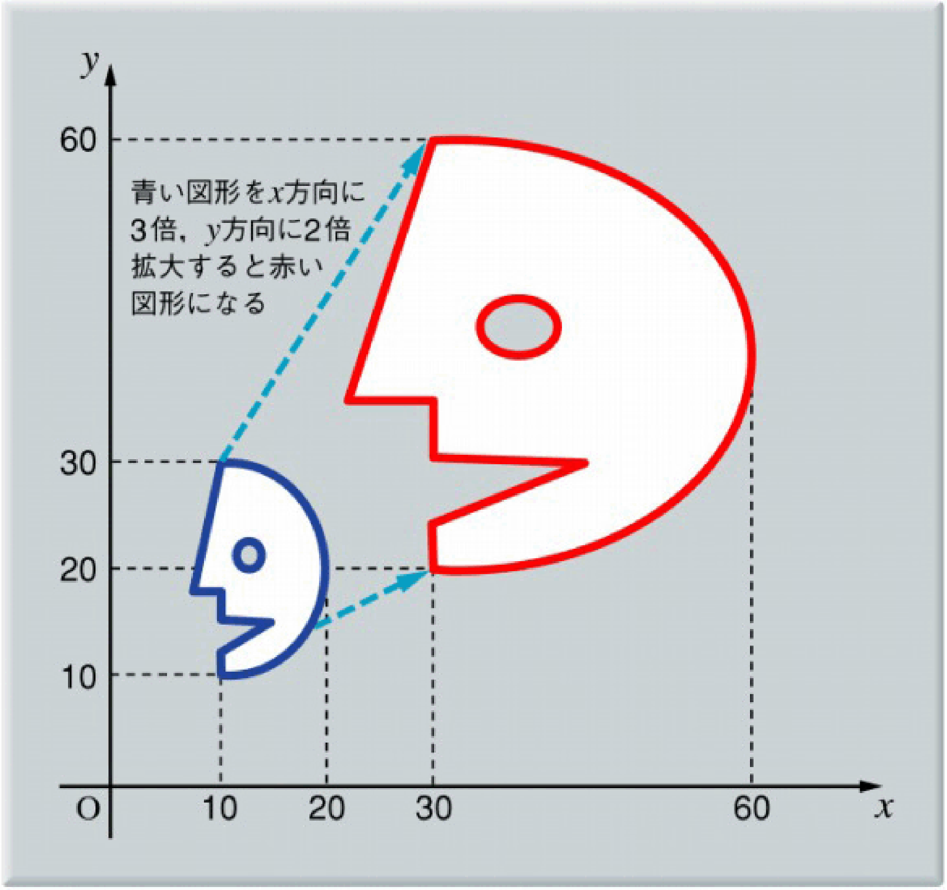
$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$



拡大・縮小

- 図形の個々の点の座標(x, y)をそれぞれs_x, s_y倍して(x', y')に移す変換
- 拡大
  - $S_x>1$(または$S_y>1$)
- 縮小
  - $0<S_x<1$(または$0<S_y<1$)

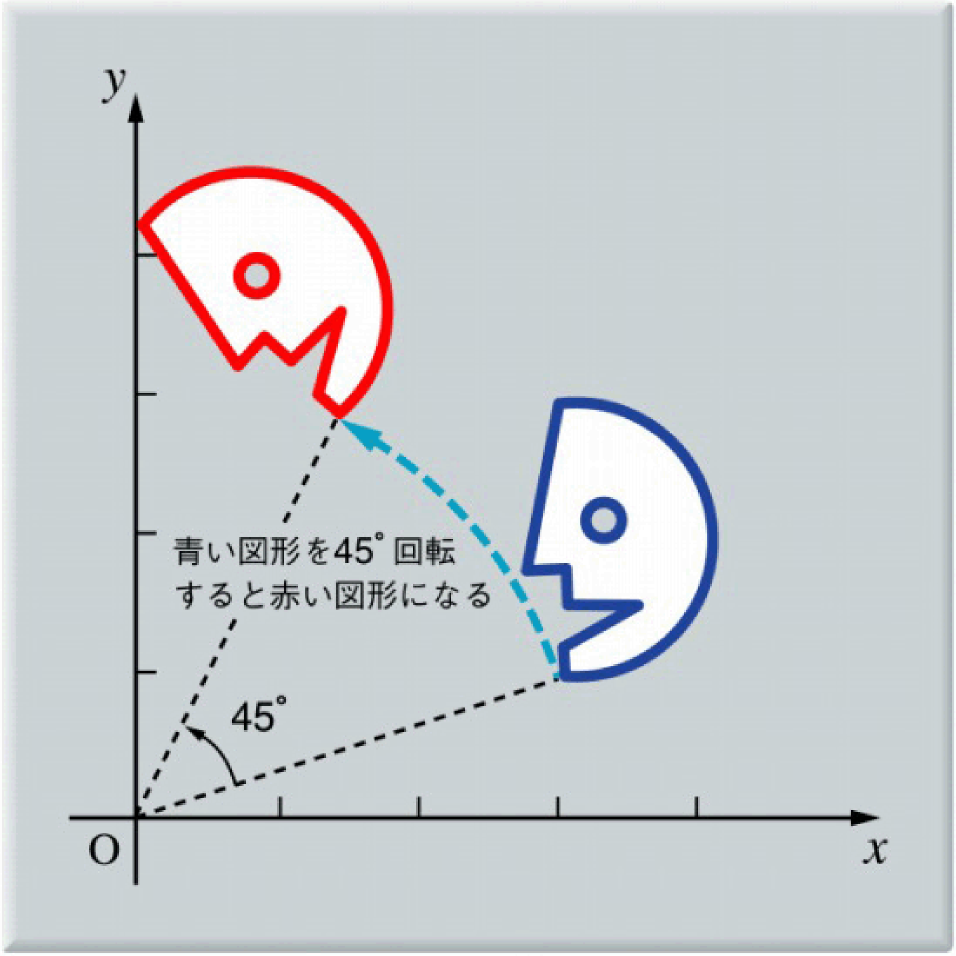
$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \end{cases}$$



回転

- 原点Oを中心に点(x, y)を反時計回りにθ度回転させ(x', y')に移す変換

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



同次座標

- 平行移動，拡大･縮小，回転等の基本変換は組み合わせてることが多く，全ての変換の統一的な述が望ましい
- 座標の列ベクトル$(x, y)^{\mathrm{T}}$の行列演算で表そうとするとき，拡大･縮小と回転は行列との積，平行移動はベクトルの和になってしまう

拡大･縮小

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

回転

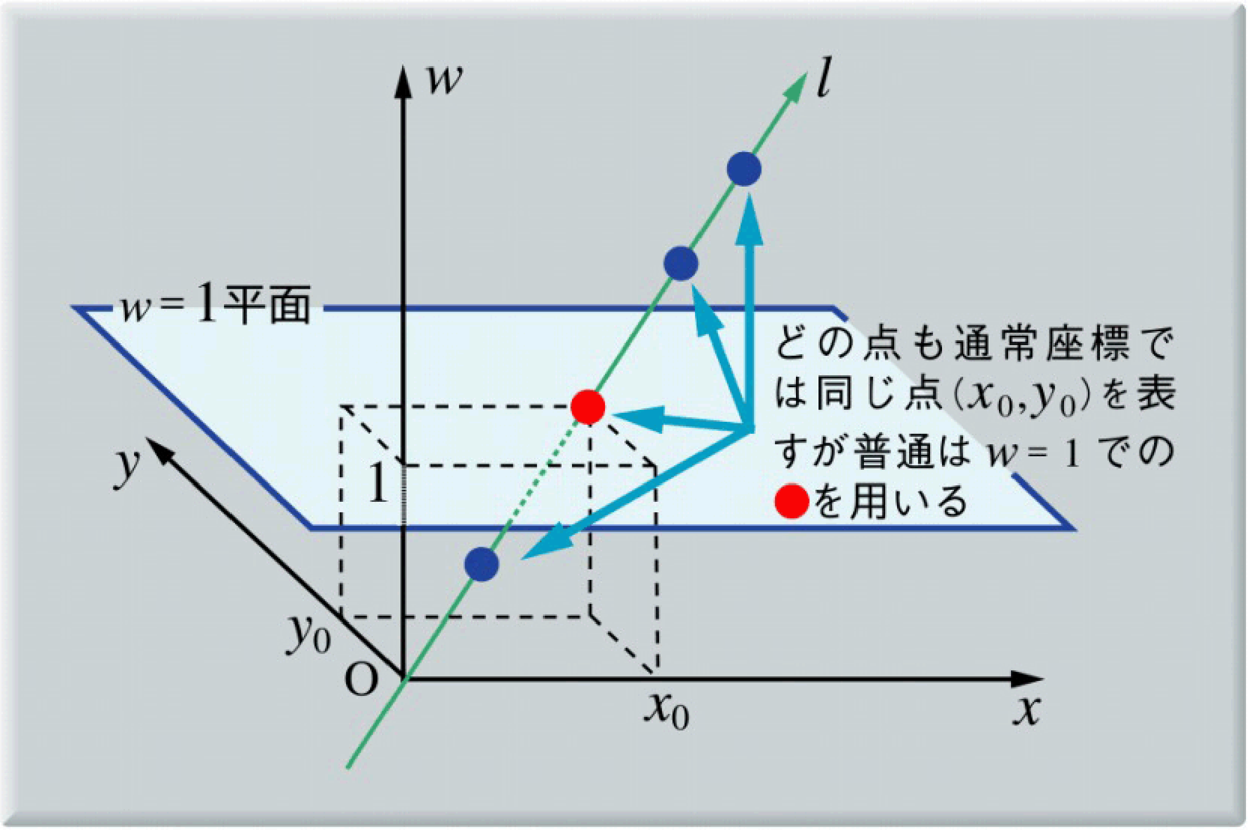
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

同次座標

- 実数$w \neq 0$を用いて(wx, wy, w)と表す座標
  - 通常座標(2,3)の同次座標(2,3,1)と(4,6,2)は同じ
  - 簡単のため普通はw=1を用いる
- 全ての幾何学的変換を行列の積で表す



同次座標

拡大･縮小

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = S(s_x, s_y) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

回転

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T(t_x, t_y) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

鏡映

x軸に関する鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

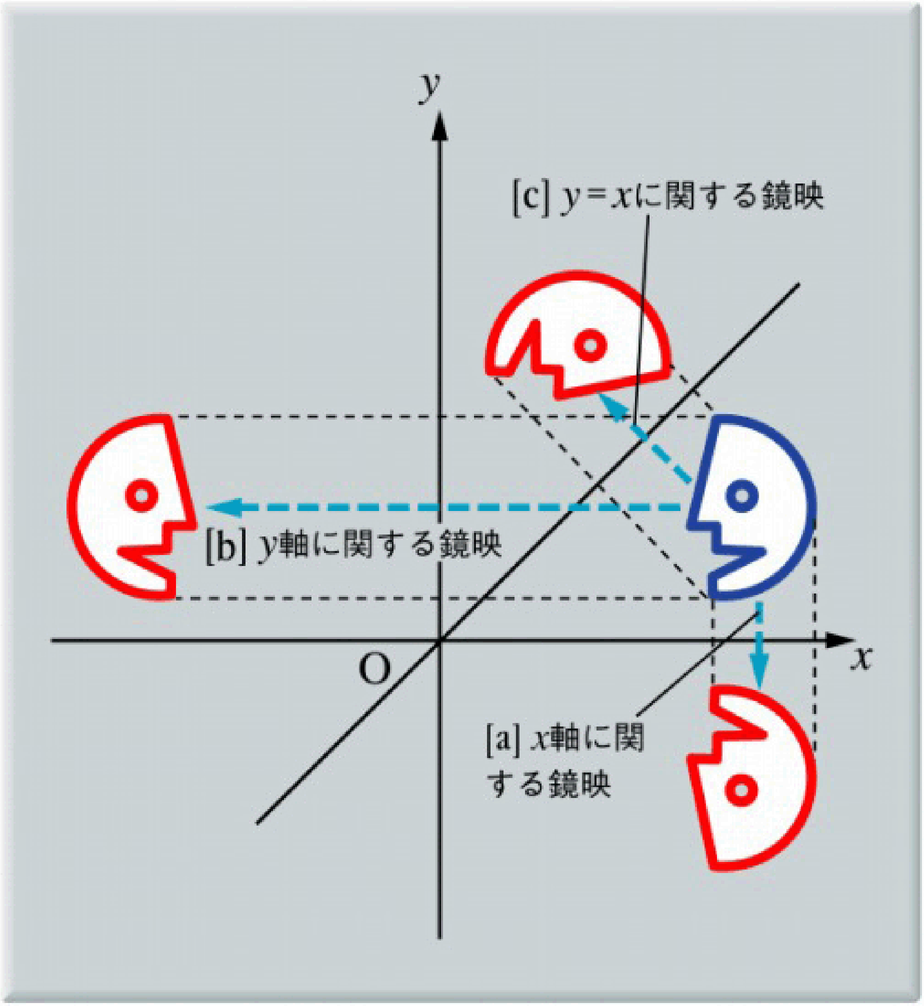
y軸に関する鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

直線x = yに関する鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

x座標とy座標の交換



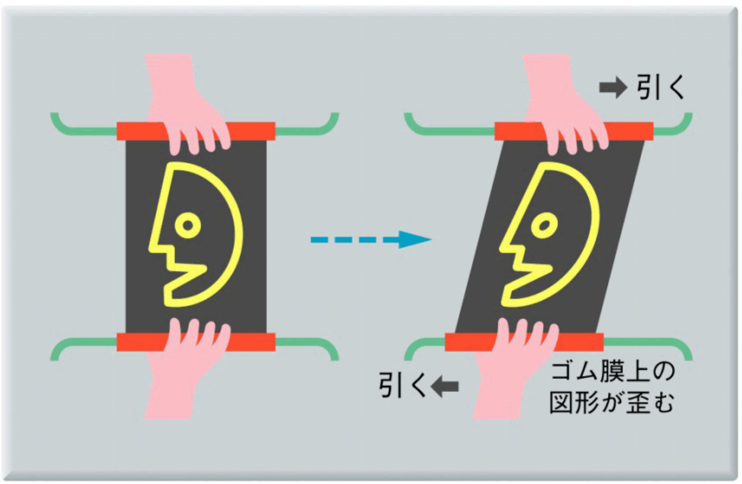
スキュー（せん断）

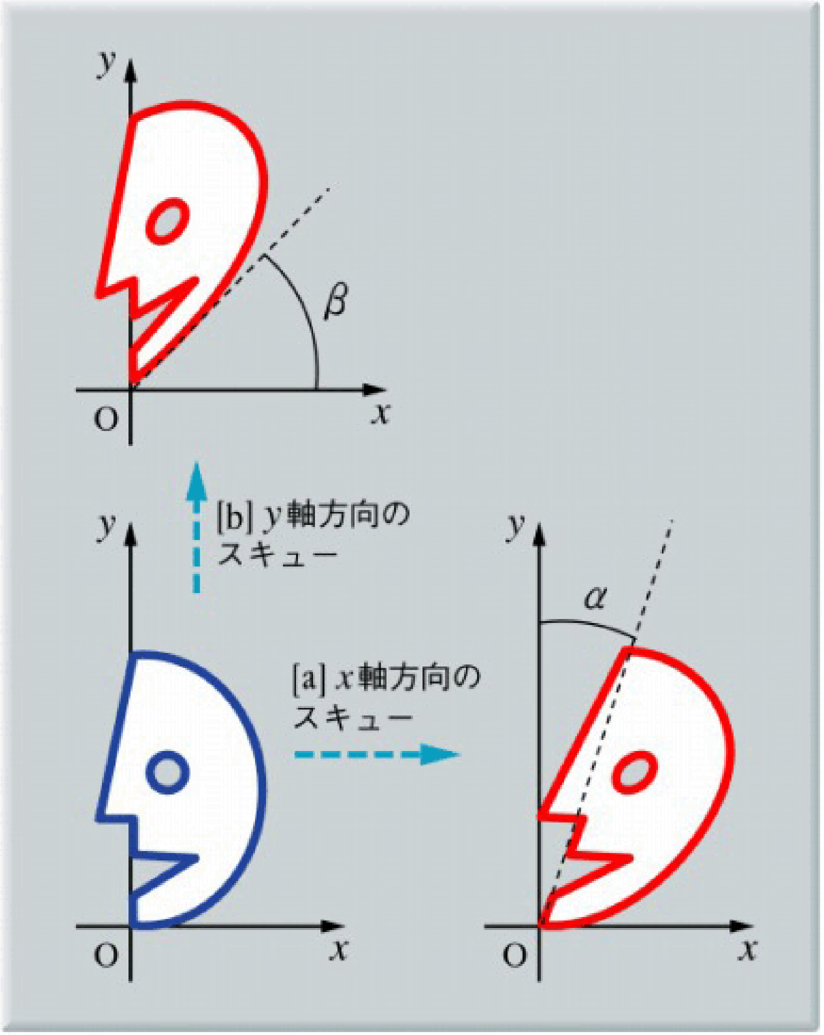
y方向のスキュー

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

x方向のスキュー

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

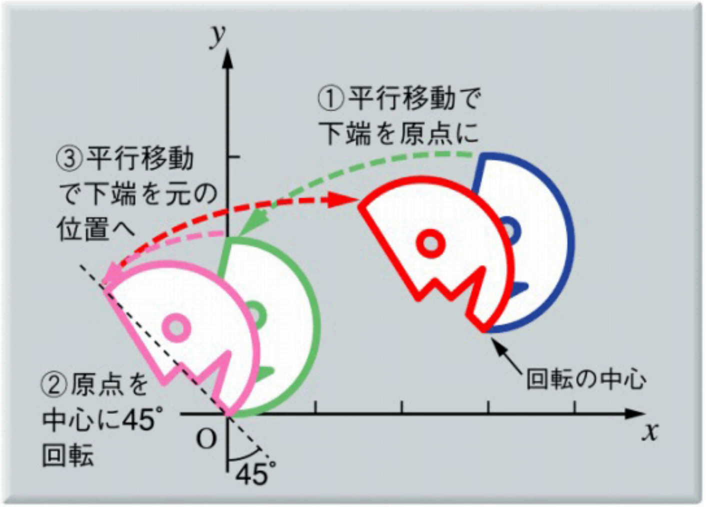




2次元座標系における合成変換

- 点$p=(x, y, 1)^T$に対して変換A_1, A_2, A_3を順番に行うとき変換後の点$p'= (x', y', 1)^T$は$p'= (A_3 (A_2 (A_1 p)))$となる
- 行列の積は結合則な成り立つので$A=A_3A_2A_1$とすると

$$p'= (A_3 A_2 A_1)\, p=Ap$$



回転,鏡像,スキュー等、原点Oを起点とする変換なので、図形の変換の起点を原点に平行移動した後に元の位置に平行移動する必要がある

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T(x_0, y_0)R(\theta)T(-x_0, -y_0)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

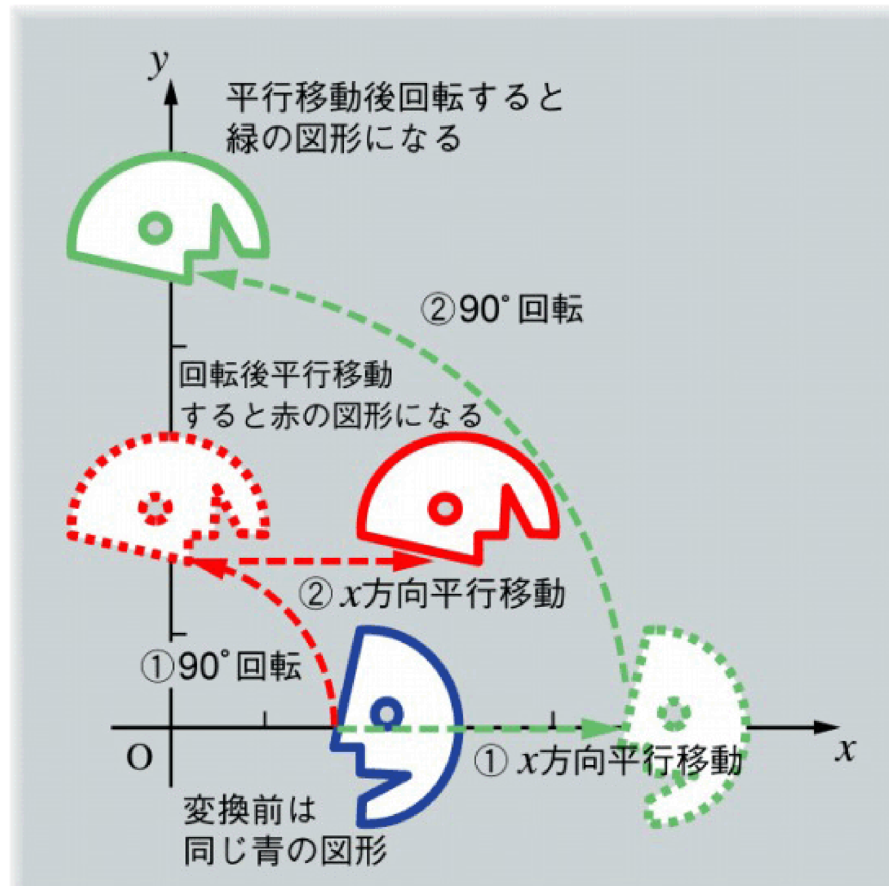
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2次元座標系における合成変換

- 合成変換では変換の順序を入れ替えると一般には同じ変換にならない（$A_1A_2 \neq A_2A_1$）ことに注意

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = R(\theta)T(x_0, y_0)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T(x_0, y_0)R(\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$



2次元座標系における合成変換

- 点(x_0, y_0)を通りx軸と角度θをなす線分に対する鏡映

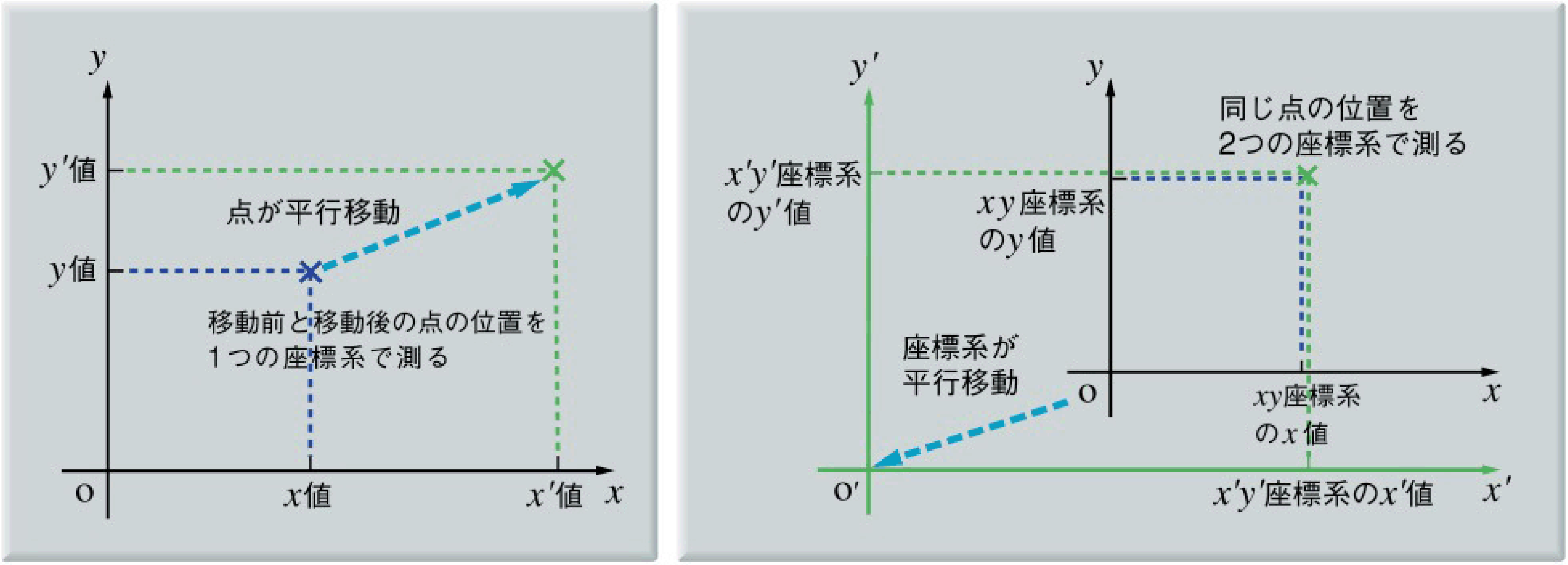
① 点(x_0, y_0)が原点Oになるように平行移動
② x軸と角度θをなす線分がx軸と一致するように-θ回転
③ x軸に関する鏡変換
④ ②と逆に原点を中心にθ回転
⑤ ①と逆に原点が再び点(x_0, y_0)になるように平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{T(x_0, y_0)}_{⑤}\underbrace{R(\theta)}_{④}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{③}\underbrace{R(-\theta)}_{②}\underbrace{T(-x_0, -y_0)}_{①}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2次元アフィン変換

(解釈1) 1つの座標系の中で、点(x, y)を(t_x, t_y)だけ平行移動して(x', y') とする

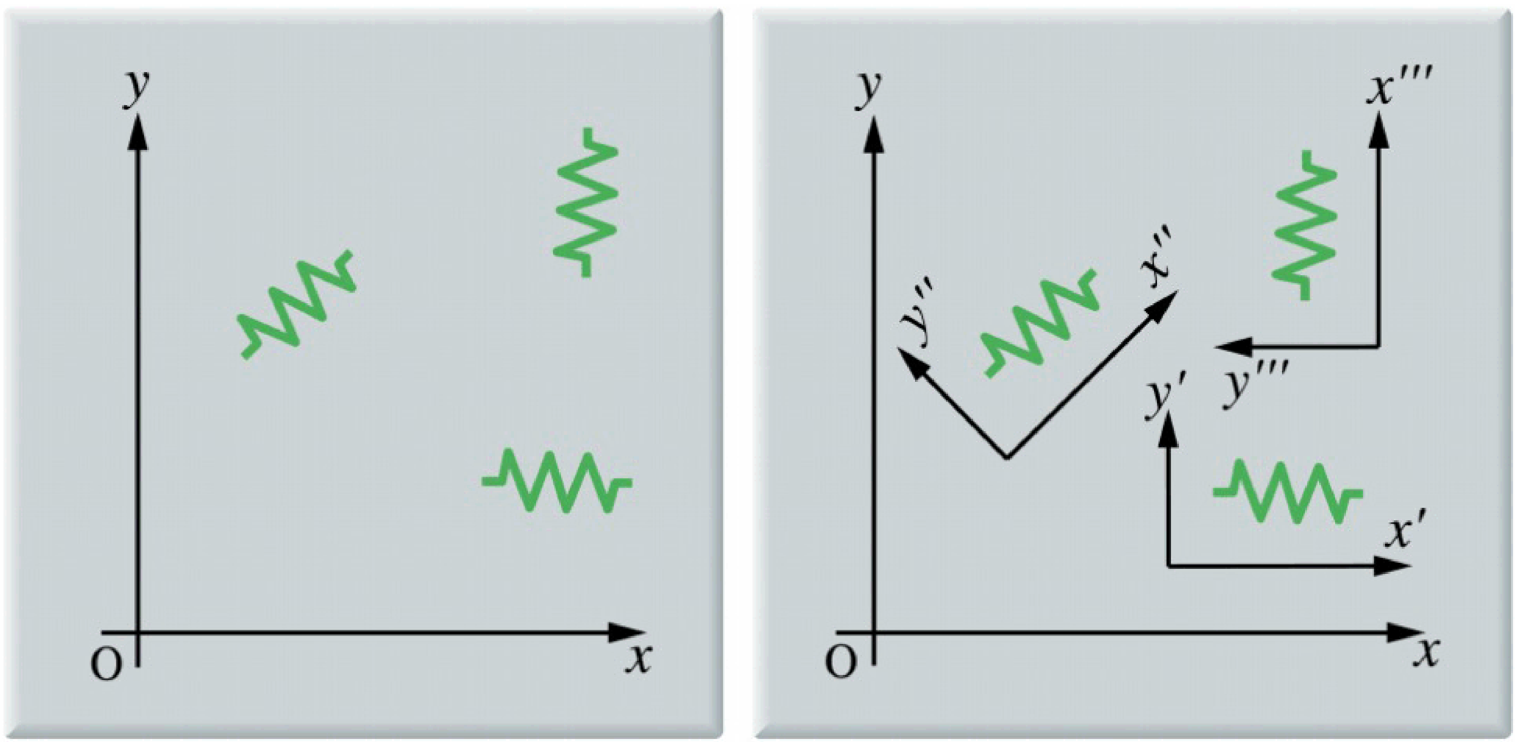
(解釈2) xy座標系を$(-t_x, -t_y)$移動して$x'y'$座標系を作り、xy座標系での点(x, y)を $x'y'$座標系での点(x', y') に変換



[a] 1つの座標系における移動前の点の位置と移動後の位置との関係　[b] 1つの点に対するxy座標系での位置と$x'y'$座標系での位置の関係

2次元アフィン変換

- 同じ図形を複数描くときに(解釈1)では各図形ごとに座標値を指定する必要がある
- (解釈2)では図形の座標値は同じで、座標系間の幾何学変換が必要となる



[a] 別々に座標値を指定しなければならない場合　[b] 別々の座標系を用いて，同じ座標値で表せる場合

2次元アフィン変換

- 幾何学変換の一般的な行列表現は次式で表され、２次元アフィン変換と呼ばれる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 通常座標系では次の形となりcとfは平行移動を与える

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

① xy座標系のx軸方向の単位ベクトル$(1, 0)$を$x'y'$座標系で見たときのベクトルは(a, d)

② xy座標系のy軸方向の単位ベクトル$(0, 1)$を$x'y'$座標系で見たときのベクトルは(b, e)

③ xy座標系の原点$(0, 0)$を$x'y'$座標系で見たときの点の座標値は(c, f)

2次元アフィン変換

- ２次元アフィン変換では直線は直線に変換され、直線上の距離の比は保存される
- 回転と平行移動はどの順序で何回組み合わせても図形の形状は変化せず、特に剛体変換と呼ばれる
- ２次元アフィン変換の逆変換も2次元アフィン変換で、元の変換の逆行列で表される
- 合成変換$A_n \cdots A_2 A_1$の逆変換は$A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_n^{-1}$

拡大･縮小 $$S(s_x, s_y) \leftrightarrow S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right)$$

回転 $$R(\theta) \leftrightarrow R(-\theta)$$

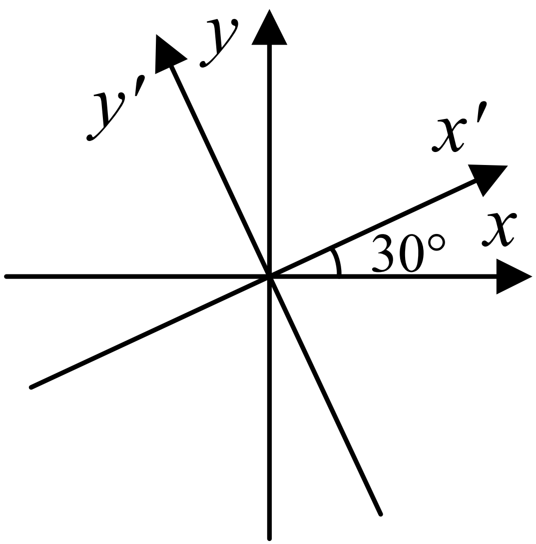
平行移動 $$T(t_x, t_y) \leftrightarrow T(-t_x, -t_y)$$

演習

- 下図のようにxy座標系を原点を中心に反時計回りに30°回転させたものを$x'y'$座標系とするとき

1. xy座標系の点を$x'y'$座標系に次のように変換する行列Aを求めなさい
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $x'y'$座標系の点をxy座標系に次のように変換する行列Bを求めなさい
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$



演習(解答)

$$A = R(-30°) = \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) & 0 \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = R(30°) = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) & 0 \\ \sin(30°) & \cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$