【問1】

(a)〜(d)の問いに最も適するものを解答群から選び，記号で答えよ．

(a) 図1.1に示す円Aは，中心が(4,1)，半径が1である．ここで，図1.2のように，円Aを中心が原点となるように平行移動し，円A′とする．円Aを円A′に変換する座標変換式はどれか．

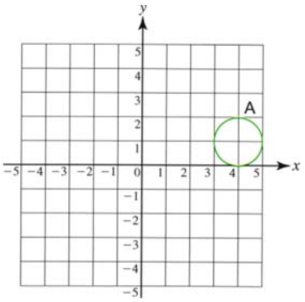


図1.1

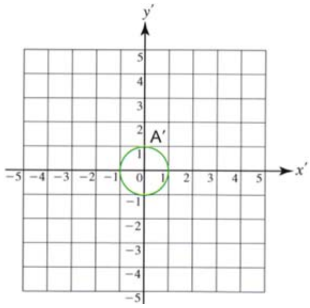


図1.2

ア $\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y+1 \end{cases}$　　イ $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x-2 \\ y'=2y+1 \end{cases}$　　ウ $\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y-1 \end{cases}$　　エ $\begin{cases} x'=2x-4 \\ y'=\dfrac{1}{4}y-1 \end{cases}$

(b) 図1.3の青色で示した図形に，次式(1.1)で表される変換を施した場合，どのような図形が得られるか．

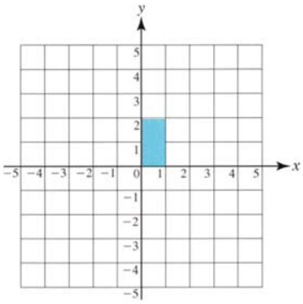
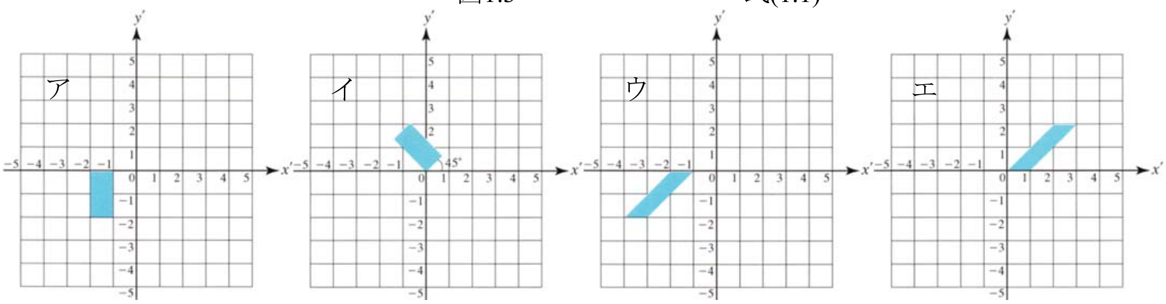


図1.3

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y \end{cases}$$

式(1.1)



(c) 図1.4の直線lに合成変換を施してy軸と重ねた．どのような合成変換を行ったか．ただし，回転の向きは，反時計まわりを正方向とする．

【解答群】

ア．直線lを原点を中心に-45°回転したあと，原点を中心に90°回転．

イ．直線lをx軸方向に5平行移動したあと，原点を中心に45°回転．

ウ．線lを原点を中心に45°回転したあと，x軸方向に5平行移動．

エ．直線lを点(-5,0)を中心に45°回転したあと，x軸方向に-5平行移動．

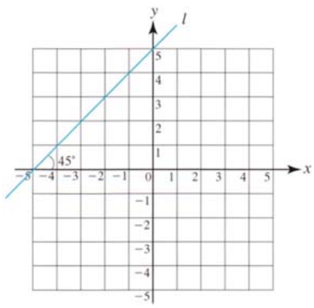


図1.4

(d) 図1.5において，点P(2,1)を解答群中の1つの変換を用いて，点P′(-1,-2)へ変換したいそのような変換が<u>できない</u>ものはどれか.

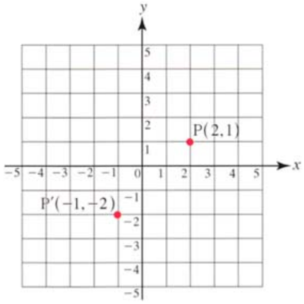


図1.5

【解答群】

ア．座標軸に関する鏡映変換
イ．平行移動変換
ウ．回転変換
エ．拡大･縮小変換

【問2】

(a)〜(d)の問いに最も適するものを解答群から選び，記号で答えよ.

(a) 図2.1に示した図形をy軸方向に2倍したあと, x軸方向に5, y軸方向に-10平行移動するとどのような図形が得られるか.

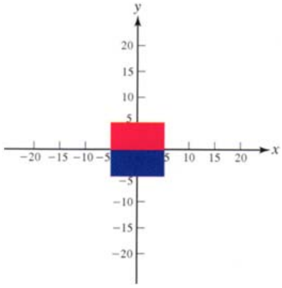
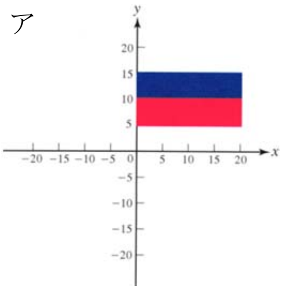
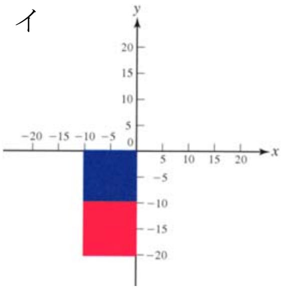


図2.1

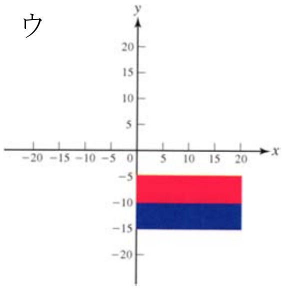
ア



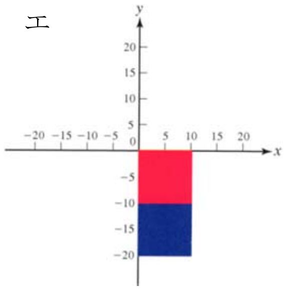
イ



ウ



エ



(b) 図2.2に示した図形Aを座標変換すると図2.3の図形Bが得られた. どのような座標変換を行ったか. なお, 図2.2と図2.3において頂点P,Q,R,Sはそれぞれ対応している.

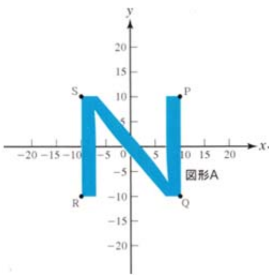


図2.2

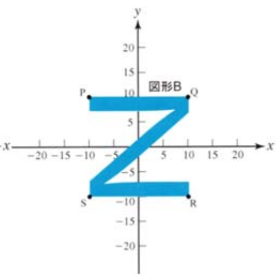


図2.3

【解答群】

ア．原点に関して対称変換.
イ．原点に関して反時計まわりに 90°回転.
ウ．原点に関して反時計まわりに 180°回転.
エ．x 軸に関して鏡映変換したあと原点に関して反時計まわりに 180°回転.

(c) 図2.4に示した図形に次式(2.1)で表される変換を施した場,どのような図形が得られるか.

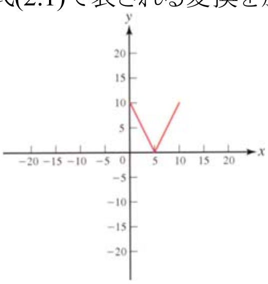
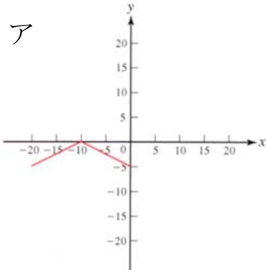


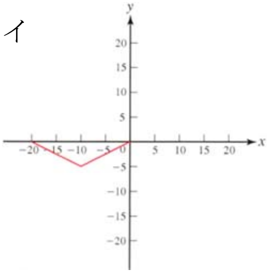
図2.4

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x \\ y' = -2y \end{cases} \qquad (2.1)$$

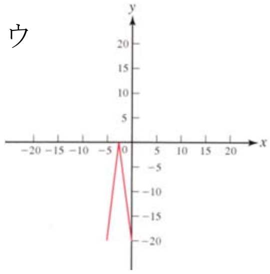
ア



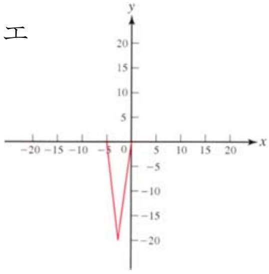
イ



ウ



エ



(d) 図2.5に示した図形Aを座標変換すると図2.6の図形Bが得られた．どのような座標変換を行ったか．なお，図2.5と図2.6において頂点P,Q,R,Sはそれぞれ対応している．

【解答群】
ア．原点に関して反時計まわりに 90°回転．
イ．直線 $y=x$ に関して鏡映変換．
ウ．直線 $y=-x$ に関して鏡映変換．
エ．y軸に関して鏡映変換したあと，x軸に関して鏡映変換．

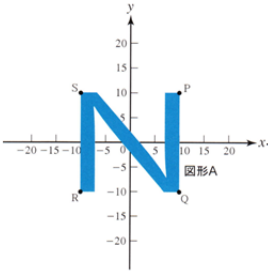


図2.5

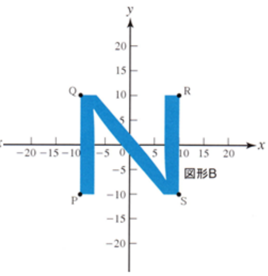


図2.6

【問3】

図3.1の図形上の任意の点(x, y)を式(3.1)によって点(x', y')に変換することで，図形の回転，平行移動などを統一的に扱うことができる．

以下にあげるM_1〜M_4の変換行列を用いて，図3.1の図形を図3.2〜図3.5の図形にするための変換について(a)〜(b)の問いに最も適するものを解答群から選び，記号で答えよ．

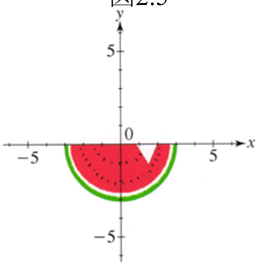


図3.1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

式(3.1)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

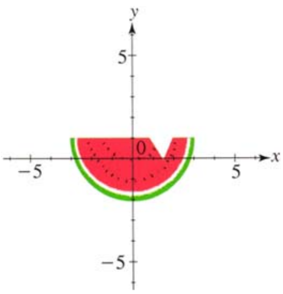


図 3.2

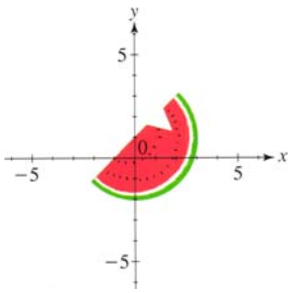


図 3.3

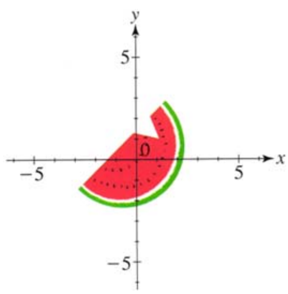


図 3.4

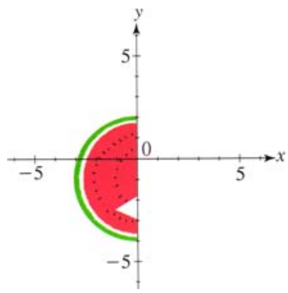


図 3.5

(a) 図3.1の図形が図3.2の図形となるための変換行列はどれか．
【解答群】ア．M_1　イ．M_2　ウ．M_1　エ．M_4

(b) 図3.1の図形が図3.3の図形となるための合成変換を表したものはどれか．
【解答群】ア．M_1M_3　イ．M_4M_1　ウ．M_2M_3　エ．M_1M_2

(c) 図3.1の図形が図3.4の図形となるための合成変換を表したものはどれか．
【解答群】ア．$M_2M_4M_4$　イ．$M_3M_3M_1$ ウ．$M_4M_4M_2$　エ．$M_1M_3M_3$

(d) 図3.1の図形が図3.5の図形となるための合成変換を表したものはどれか．
【解答群】ア．M_2M_3　イ．M_1M_4　ウ．M_2M_4　エ．M_3M_1

【問4】

以下は，2次元幾何変換に関する問題である．平面上のアフィン変換は，式 (4.1)に示すように，変換後の座標値(x', y')が変換前の座標値(x, y)の1次式で表現できる．この変換は，平行移動，回転，拡大・縮小，鏡映や，これらを組み合わせたものである．

図4.1に示す図形(ト音記号)をさまざまなアフィン変換によって変換した結果が，図a～dの図形である．これらの変換を表す式として，最も適するものを解答群から選び，記号で答えよ．

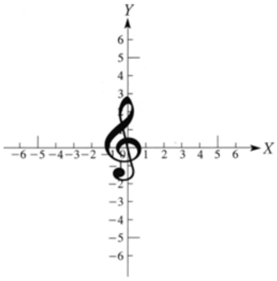


図4.1

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$$

式(4.1)

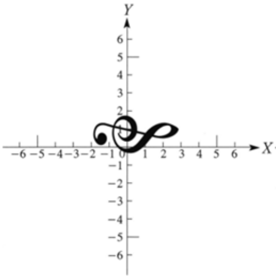


図 a

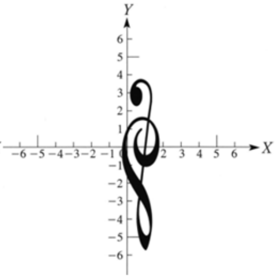


図 b

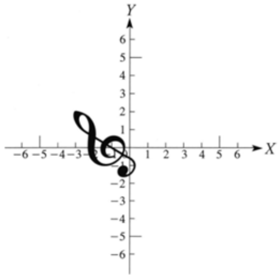


図 c

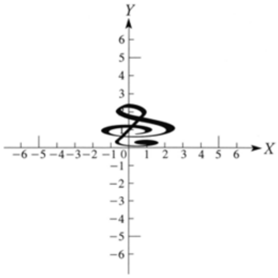


図 d

【aの解答群】

ア. $\begin{cases} x' = -y-1 \\ y' = -x \end{cases}$　イ. $\begin{cases} x' = 2y-1 \\ y' = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$　ウ. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x+1 \end{cases}$　エ. $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x \end{cases}$

【bの解答群】

ア. $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = 2y+1 \end{cases}$　イ. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y+1 \end{cases}$　ウ. $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = -2y \end{cases}$　エ. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y+1 \end{cases}$

【cの解答群】

ア. $\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$　イ. $\begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} - 1 \\ y' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$　ウ. $\begin{cases} x' = \dfrac{-x-y}{\sqrt{2}} - 1 \\ y' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$　エ. $\begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$

【dの解答群】

ア. $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = \dfrac{1}{2}y+1 \end{cases}$　イ. $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x+1 \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$　ウ. $\begin{cases} x' = -2x+1 \\ y' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$　エ. $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = 2y+1 \end{cases}$

【解答1】

(a) ウ　(b) エ　(c) イ　(d) ア

(a) 円Aの中心(4,1)を原点(0,0)へ変換すればよいので，x軸方向に-4，y軸方向に-1平行移動すればよいことがわかります．よって座標変換式は，$x'=x-4$, $y'=y-1$となり，ウが正解です．

(b) 式(1.1)は，x軸方向に45°スキュー(せん断)した式です．スキューとは，長方形を平行四辺形になるように歪ませる変換です．ところで図1.3の点(1,2)を式(1.1)に代入すると(3,2)となり，解答群でこれを満たすのはエです．

(c) ア：直線l上の2点，たとえば(0,5),(-5,0)を,原点を中心に-45°回転させ,そのあと,この2点を原点を中心に90°回転させます．最後に,この2点を通る直線を求めれば変換後の直線が求まります．まず，直線l上の点(0,5)を，原点を中心に-45°回転した点の座標は，回転の変換式

$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta$を用いて

$x'=0\cos(-45°)-5\sin(-45°)=\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y'=0\sin(-45°)+5\cos(-45°)=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ より

$\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$

続いて，点$\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$を，原点を中心に90°回転した点の座標は

$x'=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\cos 90°-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sin 90°=-\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y'=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sin 90°+\dfrac{5}{\sqrt{2}}\cos 90°=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ より

$\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$

よって，これら2点$\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$を通る直線は，$y$軸と平行な直線$x=-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$となり$y$軸とは一致しません．

イ：直線lを，x軸方向に5平行移動すると直線lは原点を通り，x軸と45°の角度をなす直線$y=x$となります．この直線を原点を中心に45°回転させれば，明らかにy軸と重なります．計算式で求めると次のようになります．直線$y=x$上の2点，例えば(5,5)と(-5,-5)を45°回転させその2点を通る直線を求めます．まず,点(5,5),原点を中心に45°回転した点の座標は，回転の変換式

$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta$を用いて

$x'=5\cos 45°-5\sin 45°=0,\ y'=5\sin 45°+5\cos 45°=\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ より

$\left(0, \dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)$となります．

続いて，点(-5,-5)を原点を中心に45°回転した点の座標は

$x'=-5\cos 45°+5\sin 45°=0,\ y'=-5\sin 45°-5\cos 45°=-\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ より

$\left(0, -\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)$となります．

これら2点$\left(0, \dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, -\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)$を通る直線は$x=0$でこれは$y$軸です．

ウ：まず，直線l上の2点，例えば(0,5)と(-5,0)を45°回転させます．点(0,5)を，原点を中心に45°回転した点の座標は，回転の変換式

$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta$を用いて

$x'=0\cos 45°-5\sin 45°=-\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y'=0\sin 45°+5\cos 45°=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ より

$\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$となります．

続いて，点(-5,0)を原点を中心に45°回転した点の座標は

$x'=-5\cos 45°-0\sin 45°=-\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y'=-5\sin 45°+0\cos 45°=-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ より

$\left(-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$となります．

よって，これら2点$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$を通る直線は，$y$軸と平行な直線$x=-\frac{5}{\sqrt{2}}$となります．これを$x$軸方向に5平行移動しても$x=-\frac{5}{\sqrt{2}}+5\neq 0$となり，$y$軸とは重なりません．

エ：直線l上の点(x_0,y_0)を,(-5,0)を中心に45°回転するとき,原点を中心に回転するのではないので注意が必要です．この場合は,点(-5,0)を原点に平行移動し,つぎに原点を中心に45°回転し，最後に再び原点を点(-5,0)に戻す平行移動を順次行う合成変換をします．これを,同次座標で表すとつぎのようになります．な

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

いま，直線l上の2点(-5,0)と(0,5)を，(-5,0)を中心に45°回転すると，式(1.1)を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．この2点を通る直線はy軸に平行な直線x=-5です。そのあと, x軸方向に-5平行移動するとx=-10となりy軸と一致しません。

(d) ア：x軸に関して鏡映変換を行うと′点Pは(2,-1)に，y軸に関して鏡映変換を行うと点Pは(-2,1)に変換されてしまいます．これらの座標は点P′とは異なりますから，アが正解です．

イ：x軸方向に-3，y軸方向に-3平行移動すれば点Pを点P′に変換できます．

ウ：点P,点P′ともに原点からの距離は$\sqrt{5}$です．したがって，回転変換をすることにより点Pを点P′に変換できます．

エ：x軸に関して$-\frac{1}{2}$倍，y軸に関して-2倍にする拡大･縮小変換を行えば,点Pを点P′に変換できます．

【解答2】

(a) エ　(b) イ　(c) ウ　(d) エ

(a) 2次元図形の平行移動と拡大･縮小をともなう座標変換について問う問題です．元の図形のある頂点，たとえば点(5,5)は，まず，y軸方向に2倍するため(5,10)となり，この点をx軸方向に5，y軸方向に-10平行移動することから(10,0)になります．ほかの頂′点についても同様に計算すれば，正解答エが求まります．また，図形の平行移動と拡大･縮小処理を行う順番が逆になると得られる図形が異なることを知ることも重要です．

(b) 2次元図形の回転に関する座標変換について問う問題です．図2.2の点Pが90°反時計まわりに回転すると図2.3の点Pの位置にくることは,Nが正方形の形状になっていますので，図より求められます．以降，点Q,R,Sを同じように考えれば正解答イが求まります．

(c) 2次元図形の式による変換について問う問題です．この式の意味は，xは$\frac{1}{2}$倍し，yは2倍し，原点に関して対称移動しています．また，図形の各頂点の座標値を式に代入することで，変換後の図形を得ることができます．たとえば,点(0,10)は$x'=-\frac{1}{2}$，y'=-2y=-20より(0,-20)に変換されます．正解答はウです．

(d) 図2.6は，図2.5を原点に関して180°回転したものです．この変換は，y軸に関して鏡映変換したあと，x軸に対して鏡映変換する変換と同じ変換になります．このように，ある変換は，ほかの合成変換と同じになることを知ることは大切です．

【解答3】

(a) ア　(b) ア　(c) ア　(d) エ

M_1～M_4は，その数値の並びから，それぞれ，つぎのような機能をもちます．

M_1 ： y軸の正方向への平行移動
M_2 ： y軸の負方向への平行移動
M_3 ： 45°の回転行列
M_3 ： -45°の回転行列

これらを用いて(a)～(d)の変換を考えます．

(a) 図3.2は図3.1のy軸の正方向への平行移動ですから，M_1となります．
(b) 図3.3においては，図1.1の原点に位置していた図形の部位がy軸正方向に移動していることがわかります．これは図形がy軸の正方向に移動したことを示します．また，回転は原点が中心となりますので，まずM_3で45°回転させたあと，y軸正方向にM_1移動すればよいことがわかります．式(3.1)を見ると合成変換の場合，新しい変換行列は古い行列の左側に掛けることがわかるので，この合成変換の行列が$M_1 M_3$であることがわかります．
(c) 図3.1においてx軸上にあつた図形の直線部が，図3.4においてはy軸上にきていることから-90°回転させたものであることがわかります．また，図3.1において原点に位置していた部位が図3.4ではy軸の負方向に移動しています．したがつて，まず図3.1に回転を施したあとにy軸の負方向に移動させればよいことになります．与えられた回転行列は±45°回転行列なので，これを連続して2回掛けることで-90°回転が実現できます．回転の方向に注意して，$M_2M_4M_4$となります．
(d) 図3.5は図3.3とよく似ているので，違うところを注意して観察します．そうすると，図3.1において原点に位置していた図形の部位の位置が異なることがわかります．図3.5は，図3.2を回転させたものであることがわかります．そこで，図3.2の平行移動をしたあと，回転させればよいことがわかります．したがつて，M_3M_1となります．

【解答4】

(a) ウ　(b) ウ　(c) イ　(d) ア

(a) 左右を反転させて-90° の回転をしたものですが，同時に$y=x$の式に関する鏡像変換とも考えることができます．その場合はxとyを交換すればよいことがわかります．最後にy方向に1平行移動しています．
(b) y座標のみ反転し，かつ拡大しており，そのあとx方向に1平行移動しています．一般にy座標が反転している場合は， yの符号を変えることになります．また，拡大変換もされているので$y'=-2y$となります．一方，x 方向に1平行移動しているので，$x'=x+1$となります．
(c) これは45° の回転を表していることがわかります．回転変換を表す式は，

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

です．θが45° の場合は，$\sin=1/\sqrt{2}$，$\cos=1/\sqrt{2}$となります．最後にx方向に-1平行移動しています．
(d) x座標は反転かつ拡大し，一方y座標は縮小しています．さらにy方向に1平行移動しています．